

# فصل ۱ مقدمات

نگارش: تابستان ۱۳۸۹  
آخرین ویرایش: ۲۵ مهر ۱۳۹۸

مانند یک معادله معمولی که رابطه‌ای میان اعداد و متغیرهاست، یک معادله دیفرانسیل نیز رابطه و معادله‌ای میان یک تابع و مشتقاتش می‌باشد. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل بصورت

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

است که  $y$  تابعی از  $x$  و  $y'$  و  $y''$  و . . . مشتقات پیاپی آن بر حسب  $x$  هستند. این رابطه می‌تواند شامل توابع مقدماتی و مقادیر ثابت نیز باشد. همچنان که در معادله معمولی بدنبال «عددی» به نام ریشه معادله هستیم که در معادله صدق کند، در معادله دیفرانسیل نیز بدنبال «تابعی» هستیم که در معادله صدق نماید. بنابراین در این نوع معادلات، مهم یافتن تابعی مانند  $y$  می‌باشد که در معادله دیفرانسیل صدق کند که این  $y$  را **جواب معادله دیفرانسیل** نامیم. از آنجا که یک روش کلی برای حل تمام معادلات دیفرانسیلی وجود ندارد، با بررسی و رده بندی معادلات مختلف و انواع گوناگون آنها، به حل اینگونه مسائل می‌پردازیم. علاوه بر این برخی روشها نیز ترکیبی از روشهای قبلی خواهد بود.

## ۱.۱ معادله دیفرانسیل چیست؟

معادله‌ای که شامل حداقل یکی از مشتقات یک تابع مانند  $y$  (اعم از مشتق اول، دوم، سوم، ...) باشد یک معادله دیفرانسیل است، نظیر

$$\begin{aligned}y' + 2y &= 4x + 1 \\ y - y'' + 2x &= 4y' + 3\end{aligned}$$

که دو معادله دیفرانسیل محسوب می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۱. هر معادله که شامل حداقل یکی از مشتقات یک تابع باشد را معادله دیفرانسیل نامیم.

بنابراین معادله دیفرانسیل حتماً باید شامل عبارت مشتق یا عبارت دیفرانسیلی باشد تا معادله دیفرانسیل به حساب آید. بخاطر داشته باشید که  $y' = \frac{dy}{dx}$  مشتق اول،  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  مشتق دوم و . . . و  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$  مشتق  $n$ -ام تابع  $y$  هستند. همچنین ممکن است مانند فیزیکدانان، از نماد  $\ddot{y}$  برای مشتق اول و از  $\dot{y}$  بجای مشتق دوم استفاده شود. نوع معادله دیفرانسیل به تعداد متغیرهای مستقل مرتبط است:

تعریف ۲.۱.۱. اگر یک معادله دیفرانسیل تنها یک متغیر مستقل داشته باشد، آنرا یک **معادله دیفرانسیل معمولی**<sup>۱</sup> و معادله‌ای که دارای مشتقات جزئی (به شکل  $\partial y$  و  $\partial x$ ) بوده که لزوماً شامل چند متغیر مستقل است را معادله دیفرانسیل جزئی<sup>۲</sup> نامیم.

برای مثال معادله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x \frac{d^2y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} = 2xy - 3$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی و

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x - 2y \frac{\partial x}{\partial z}$$

یا

$$u_x = v_y$$

معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. استفاده از کلمه «معمولی» جهت تمایز با معادله از نوع جزئی است. از اینجا به بعد، بحث روی معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل (۱) را پی می‌گیریم که در آنها غالباً  $x$  متغیر مستقل و  $y(x)$  متغیر تابع محسوب شده و بجای  $y(x)$  تنها به نوشتن  $y$  بسنده می‌کنیم.

### ۱.۱.۱. مرتبه، درجه و خطی بودن یک معادله دیفرانسیل

در بسیاری از مسائل معمول علوم، می‌توان مرتبه، درجه و خطی بودن یک معادله دیفرانسیل را تعیین نمود:

تعریف ۳.۱.۱. **مرتبه** یک معادله دیفرانسیل عبارتست از مرتبه بزرگترین مشتق ظاهر شده در معادله. بزرگترین توان برای مرتبه یک معادله دیفرانسیل را **درجه** معادله دیفرانسیل نامند و **خطی بودن** معادله دیفرانسیل به این معناست که معادله بصورت

$$f_n \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f_1 \frac{dy}{dx} + f_0 y = g \quad (2)$$

باشد که در آن  $f_i$ ها و  $g$  توابعی از  $x$  هستند و هر معادله‌ای که تمام مشتقات آن از توان یک باشند، خطی است.

در حقیقت یک معادله دیفرانسیل وقتی برای ما مفهوم دارد که آنرا بتوان بصورت یک چندجمله‌ای با ضرایبی از توابع بر حسب خودش و مشتقاتش نوشت.

<sup>۱</sup> Ordinary differential equation (ODE)

<sup>۲</sup> Partial differential equation (PDE)

**مثال ۴.۱.۱.** مرتبه، درجه و خطی بودن معادلات دیفرانسیل زیر را ملاحظه نمائید:

مرتبه ۳، درجه ۱ و خطی.	$y''' - 6xy' = 2 - 3e^x$
مرتبه ۱، درجه ۲ و غیرخطی (مشتق دارای توان ۲)	$y + 9x(y')^2 = e^x - 5$
مرتبه ۲، درجه ۱ و خطی	$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - (\sin x)y = 0$
مرتبه ۲، درجه ۱ و غیرخطی	$y''y - 2x + y' = e^x$
مرتبه ۱، درجه ۳ و غیرخطی	$3t \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + 4(\sin t)y^4 - 2 = 0$
مرتبه ۳، درجه ندارد و غیرخطی	$t^2 \frac{d^3y}{dt^3} - \sin t \frac{dy}{dt} - \cos(ty) = 0$
مرتبه ۱، درجه ۷ و غیرخطی است	$5xy^7 - 4(y)y^7 = x$

### ۲.۱.۱ جواب معادله دیفرانسیل

تابع مفروضی که با مشتقاتش در یک معادله دیفرانسیل صدق می کند را **جواب معادله دیفرانسیل** یا یک **انتگرال معادله** گوئیم. تعبیر عبارت دوم چنین است که مانند عمل پادمشتگیری در اینجا نیز حاصل معادله به یک نوع عمل انتگرالگیری ختم می شود.

می توان دید که تابع  $y = x^2 + 3$  جوابی برای معادله دیفرانسیل  $y' - 2x = 0$  محسوب می شود.

یک جواب معادله دیفرانسیل باید روی یک بازه  $(a, b)$  (احتمالاً نامتناهی) تعریف شده و روی آن پیوسته و مشتقپذیر باشد و علاوه با جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل، در آن صدق نماید. جواب ممکن است تابعی صریح یا ضمنی بوده و جواب معادله دیفرانسیل لزوماً یکتا نیست.

**مثال ۵.۱.۱.** بررسی کنید که  $y = \frac{1}{x}$  جوابی برای معادله دیفرانسیل  $y' + y^2 = 0$  است.

**حل.** با مشتق گیری از  $y$  داریم  $y' = -\frac{1}{x^2}$  و با جایگذاری

$$y' + y^2 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

برای هر  $x \neq 0$  برقرار است. لذا  $y = \frac{1}{x}$  در هر بازه‌ای که شامل مبدأ نباشد جواب معادله دیفرانسیل خواهد بود. □

**مثال ۶.۱.۱.** بررسی کنید که  $y_1 = e^{-2x}$  و  $y_2 = e^{-3x}$  جوابهایی برای معادله دیفرانسیل  $y'' + 5y' + 6y = 0$  هستند.

**حل.** با مشتق گیری از  $y_1$  داریم  $y_1' = -2e^{-2x}$  و  $y_1'' = 4e^{-2x}$  که با جایگذاری در معادله چنین بدست می آید:

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$$

برای  $y_2$  نیز می نویسیم  $y_2' = -3e^{-3x}$  و  $y_2'' = 9e^{-3x}$  و با جایگذاری در معادله

$$y_2'' + 5y_2' + 6y_2 = 9e^{-3x} - 15e^{-3x} + 6e^{-3x} = 0$$

پس  $y_2 = e^{-3x}$  و  $y_1 = e^{-2x}$  در فاصله  $(-\infty, +\infty)$  جوابهای معادله دیفرانسیل مذکور خواهند بود.  $\square$   
 دو جواب  $y_2 = e^{-3x}$  و  $y_1 = e^{-2x}$  را **جواب های اولیه مستقل** معادله نامیم. آنچه در مثال قبل دیده می شود آنست که معادله دیفرانسیل ممکن است دارای دو یا چند جواب اولیه باشد و براحتی می توان دید که بازای اعداد دلخواهی مانند  $C_1$  و  $C_2$ .

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

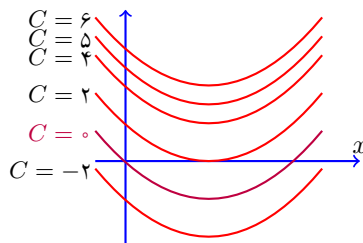
نیز جواب معادله دیفرانسیل  $y'' + 5y' + 6y = 0$  است. این جواب معادله دیفرانسیل که شامل یک یا چند ثابت اختیاری است را **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً تابع  $y = C e^{2x} + 3x$  یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3 - 6x$$

است، زیرا بازای هر ثابت عددی  $C$  در آن صدق می کند. اگر جواب عمومی بازاء پارامتر مشخصی یک **جواب اولیه** باشد، آنرا یک **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً تابع  $y = Cx + C^2$  برای هر ثابت دلخواه  $C$  در معادله  $xy' - (y')^2 = xy'$  صدق می کند، پس جواب عمومی آن خواهد بود  $\frac{1}{4}Cx^2$ . از طرفی  $y = \frac{1}{4}Cx^2$  تنها برای  $C = -1$  در این معادله دیفرانسیل صدق می کند بنابراین  $y = -\frac{1}{4}x^2$  یک جواب خصوصی معادله است. باید گفت که جواب خصوصی از جواب عمومی تحت شرایط ویژه ای بدست می آید. به مثال زیر توجه کنید:

**مثال ۷.۱.۱.** مطلوبست حل معادله دیفرانسیل  $y' = 2x - 3$ .

**حل.** از آنجائی که  $y' = \frac{dy}{dx}$  است با جایگذاری این مقدار در معادله داریم  $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$  و از آنجا  $dy = (2x - 3)dx$  با انتگرالگیری از طرفین  $\int dy = \int (2x - 3)dx + C$  و تابع  $y = x^2 - 3x + C$  برای هر ثابت دلخواه  $C$  جواب عمومی معادله بوده که دسته ای از منحنی ها بشکل ۱.۱ زیر است. اگر  $C = 0$   $\square$  یکی از جواب های خصوصی معادله خواهد بود.



شکل ۱.۱: شکل چند عضو از دسته منحنی مثال ۷.۱.۱

یک معادله ی دیفرانسیل ممکن است جواب نداشته باشد نظیر معادله ی  $y'' + 1 = 0$  و یا در برخی حالات، جواب حاصل از خود معادله بدست نیامده باشد و عبارتی جوابی خصوصی معادله بدون هیچ مقدار  $C$ یی از جواب عمومی  $y = f(x)$  است **جواب صریح** نامیده می شود ولی همیشه تمام جوابها صریح نبوده و ممکن است در شکل  $f(x, y, C) = 0$  ظاهر گردند که **جواب ضمنی** نامیده شده و با مشتقگیری ضمنی در معادله صدق خواهند کرد.

بدست آید، ولی در معادله صدق ننماید. اینگونه جوابی را **جواب غیرعادی** یا **جواب منفرد** معادله نامیم. برای مثال معادله  $y'' - 4xy' + 4y = 0$  دارای جواب منفرد  $y = x^2$  است و بعداً خواهیم دید که تمام جوابهای معادله  $y = Cx - C^2$ ، بر این جواب منفرد مماسند و نیز اینکه این جواب منفرد از حل معادله حاصل نمی شود. قابل ذکر اینکه جوابهای منفرد بندرت در مسائل مهندسی دیده می شوند.

بطورکلی جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول دارای یک پارامتر روی جواب اولیه و مرتبه دوم دارای دو پارامتر روی دو جواب اولیه مستقل است. به همین صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$ ، دارای  $n$  جواب اولیه مستقل است و می توان گفت که تعداد پارامترها برابر مرتبه معادله دیفرانسیل است. مفهوم استقلال جوابها را در فصول بعد توضیح خواهیم داد.

### ۳.۱.۱. مقادیر اولیه و مقادیر مرزی

جهت حذف پارامتر در جواب عمومی و بدست آوردن جواب خصوصی، معادله را تحت شرایطی بیان می کنند. در بیشتر حالات جواب عمومی معادله بیان می کند که معادله دارای بی نهایت جواب خصوصی است و چون هر منحنی جواب، از نقطه خاصی می گذرد این نقاط را بعنوان شروطی تحت عنوان مقادیر اولیه و مقادیر مرزی بیان می کنیم. **مقادیر اولیه** شرایطی هستند که با یک طول بیان می شوند، مانند:

$$y(4) = 0, \quad y'(4) = 3, \quad y''(4) = -2$$

و **مقادیر مرزی** شرایطی را گویند که برای طول های متفاوت بیان می گردند، مانند:

$$y(4) = 6, \quad y(2) = -1, \quad y'(4) = 3$$

فرض کنید معادله دیفرانسیل زیر با مقادیر اولیه داده شده است:

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -5$$

جواب عمومی این معادله برای  $A$  و  $B$  های دلخواه بصورت  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$  می باشد که با قرار دادن مقادیر اولیه داده شده در این جواب عمومی و بدست آوردن  $A$  و  $B$  بصورت زیر

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = 1, \\ y'(0) = -5 \Rightarrow -Ae^0 + 3Be^0 = -5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ -A + 3B = -5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -1. \end{cases}$$

جواب خصوصی  $y(x) = 2e^{-x} - e^{3x}$  حاصل می شود. مسئله یافتن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل که در یک یا چند شرط اولیه صدق کند یک **مسئله مقدار اولیه** نام دارد.

**مثال ۸.۱.۱.** معادله دیفرانسیل  $y' = y(1 - \sin t)$  را با مقدار اولیه  $y(0) = 1$  حل کنید. **حل.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y(1 - \sin t) \\ \frac{dy}{y} &= (1 - \sin t) dt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (1 - \sin t) dt \\ \ln y &= t + \cos t + C, \quad C = \ln C_1 \\ y(t) &= C_1 e^{t + \cos t} \end{aligned}$$

□ جواب خصوصی بازای  $y(0) = 1$  عبارتست از  $y(t) = e^{-1+t+\cos t}$ .

برای حل  $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$  با شرط اولیه  $y(x_0) = y_0$  می نویسیم:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial g}{\partial y} dy &= 0 \\ f(x) - f(x_0) + g(y) - g(y_0) &= 0 \\ f(x) + g(y) &= f(x_0) + g(y_0)\end{aligned}$$

در این روش حل، جواب خصوصی را بطور مستقیم می توان پیدا نمود.

**مثال ۹.۱.۱.** مطلوبست حل  $\cos x dx + \sin y dy = 0$  با شرط اولیه  $y(0) = 0$ .

**حل.** می نویسیم:

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos x dx + \int_0^y \sin y dy &= 0 \\ \sin x - 0 - \cos y + 1 &= 0 \\ \sin x - \cos y &= -1\end{aligned}$$

□ که جواب خصوصی است.

تمرین ۲.۰۱.

۱. تحقیق کنید که آیا توابع زیر جواب معادله دیفرانسیل مربوطه هستند یا خیر.

- |     |                                   |   |                           |
|-----|-----------------------------------|---|---------------------------|
| (a) | $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1$ | ; | $y'' + y = 1$             |
| (b) | $y = Ce^{2x}$                     | ; | $y' - 2y = 0$             |
| (c) | $y^2 = x^2 + C$                   | ; | $yy' = x$                 |
| (d) | $y = C \cosh 3x$                  | ; | $y'' + 9y = 0$            |
| (e) | $y = 2 + \frac{C}{x}$             | ; | $xy' + y = 2$             |
| (f) | $y^2 = e^{Cx}$                    | ; | $xy' = y \ln y$           |
| (g) | $y = x \tan(\ln x + C)$           | ; | $x^2 y' - xy = x^2 + y^2$ |
| (h) | $y = \ln x + C$                   | ; | $xy' = 1$                 |

۲. معادلات دیفرانسیل زیر را حل نموده و جواب عمومی آنها را بیابید.

- |     |                       |   |            |                        |
|-----|-----------------------|---|------------|------------------------|
| (a) | $y' = 2$              | , | (b)        | $y'^2 = 4$             |
| (c) | $y'' = e^x$           | , | (d)        | $y'' = 5$              |
| (e) | $y' = 6x + \sin x$    | , | (f)        | $y' = y \tan 2x$       |
| (g) | $y'' = \sin x$        | , | (h)        | $xy' = y + x^2 \cos x$ |
| (i) | $3x^2 dx + 4y dy = 0$ | ; | $y(1) = 2$ |                        |

۳. جوابی برای معادله دیفرانسیل  $y^2 + (y')^2 = 0$  بیان کنید. آیا می‌توانید معادله دیفرانسیلی مثال بزنید که دارای جواب نباشد؟

۴. مقدار  $k$  را طوری محاسبه کنید که  $y = x^5$  جواب معادله دیفرانسیل  $xy' = ky$  باشد.

۵. معادله دیفرانسیلی به صورت  $ay'' + by' + cy = 0$  بیابید که  $y = \sin x$  یک جواب آن باشد.

### ۳.۱ منحنی‌های جواب

از آنچه گفته شد درمی‌یابیم که جواب عمومی یک معادله برای مقادیر بیشماری از اعداد، جواب‌های خصوصی متعددی را نشان می‌دهد. این جواب‌های بیشمار، که در شکل تابع  $f(x, y, C) = 0$  به همراه پارامتر  $C$  ظاهر می‌شوند، باعث می‌شود تا با جایگذاری مقادیر مختلفی از اعداد حقیقی بجای  $C$  منحنی خاصی حاصل گردد و عبارتی  $f(x, y, C) = 0$  نشان دهنده تعداد خاصی منحنی مختص به معادله است. این تعداد منحنی جواب را با نام **دسته منحنی** یا **خانواده منحنی** ها می‌شناسیم که گاهی اوقات نام منحنی‌های انتگرال بخود می‌گیرد. شکل ۱.۱ دسته‌ای از منحنی‌ها را نشان می‌دهد که همگی از جواب عمومی  $y = x^2 - 3x + C$  حاصل شده‌اند. بدیهی است که «هر جواب خصوصی تنها یکی از این منحنی‌ها خواهد بود» و این جواب خصوصی تحت مقدار اولیه، جوابی یکتاست. از طرفی دیگر با حذف  $C$  در **دسته منحنی**  $f(x, y, C) = 0$  می‌توان معادله دیفرانسیلی بدست آورد که به تنهایی گویای این خانواده باشد. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل **دسته منحنی**  $f(x, y, C) = 0$ ، با محاسبه مشتق  $f(x, y, C) = 0$  در این دو معادله، می‌توان معادله دیفرانسیلی مربوطه را بدست آورد. بنابراین باید گفت که «هر معادله دیفرانسیل، معادله یک دسته از منحنی‌هاست».

**مثال ۱.۳.۱.** معادله دیفرانسیل **دسته منحنی** های  $y = 4x^2 + Cx$  را بدست آورید.  
**حل.** با مشتق از تابع  $y' = 8x + C$  و حذف  $C$  بین دو معادله داریم:

$$C = y' - 8x \Rightarrow y = 4x^2 + (y' - 8x)x \Rightarrow xy' - y = 4x^2$$

شکل ۳.۱ این **دسته منحنی** را نشان می‌دهد. □

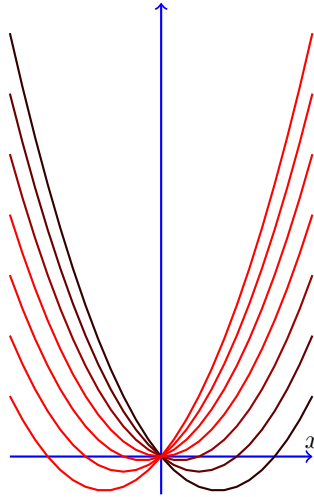
کلی‌تر اینکه برای یافتن معادله دیفرانسیل **دسته منحنی** هائی با  $n$  پارامتر، با محاسبه  $n$  مشتق متوالی از خانواده می‌توان دستگاه  $n + 1$  معادله و  $n$  پارامتر مجهول نوشت و پارامترها را بین آنها حذف نمود.

**مثال ۲.۳.۱.** معادله یک دسته **دلگون** در مختصات قطبی به شکل  $\rho = C_1 + C_2 \cos \theta$  است. معادله دیفرانسیل این **دسته منحنی** را بنویسید.

**حل.** با دو بار مشتقگیری پیاپی از  $\rho$  نسبت به  $\theta$  و حذف پارامترها چنین می‌یابیم:

$$\begin{cases} \rho' = -C_2 \sin \theta, \\ \rho'' = -C_2 \cos \theta. \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho''} = \frac{-C_2 \sin \theta}{-C_2 \cos \theta} \Rightarrow \rho' - \rho'' \tan \theta = 0$$

چند عضو از این دسته در شکل ۳.۱ نموده شده است. □



شکل ۲.۱: شکل چند عضو از دسته منحنی مثال ۱.۳.۱

### ۱.۳.۱ مسیره‌های متعامد بر یک دسته منحنی

اگر بخواهیم بر هر منحنی از خانواده منحنی‌های  $f(x, y, C) = 0$  یک منحنی دیگر عمود کنیم، خانواده‌ای پدید می‌آید که **دسته مسیره‌های متعامد** نام می‌گیرد. برای یافتن دسته مسیره‌های متعامد، ابتدا معادله دیفرانسیل **دسته منحنی** مربوطه را بصورت  $F(x, y, y') = 0$  پیدا نموده و سپس بجای  $y'$  مقدار  $-\frac{1}{y'}$  را قرار داده تا دسته مسیره‌های متعامد بدست آید. بدین ترتیب معادله دسته مسیره‌های متعامد در شکل  $F(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$  ظاهر خواهند شد.

**مثال ۳.۳.۱.** دسته مسیره‌های متعامد خانواده منحنی مثال ۱.۳.۱ را بیابید.

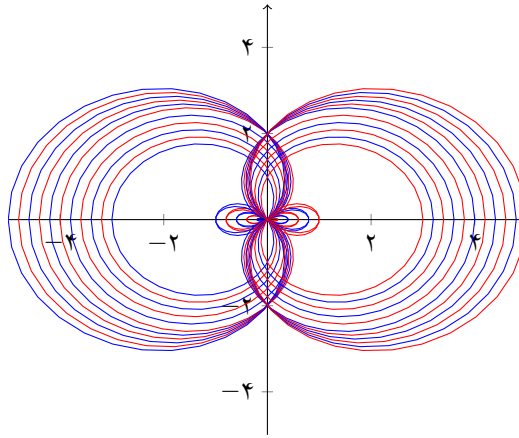
**حل.** چون  $xy' - y = 4x^2$  با جانشینی مورد نظر داریم  $x\frac{-1}{y'} - y = 4x^2$  و با ساده کردن آن، معادله دسته مسیره‌های متعامد بصورت  $4x^2y' + yy' + x = 0$  بدست می‌آید.  $\square$  در حالتی که **دسته منحنی** ها در **مختصات قطبی**  $(\rho, \theta)$  داده شده باشد، اگر  $\psi$  زاویه بین شعاع حامل و خط مماس باشد، پس

$$\tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$$

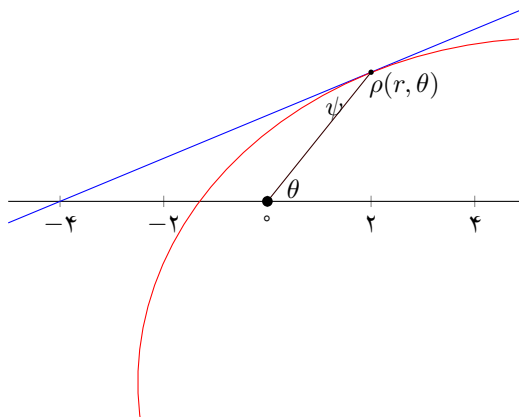
و برای یافتن مسیره‌های متعامد بر **دسته منحنی** باید مقدار  $\frac{-1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta}$  را جایگزین طرف راست نمائیم. عبارتی ساده تر

برای یافتن دسته مسیره‌های متعامد بر یک دسته منحنی در مختصات قطبی، کافیهست بجای  $\frac{d\rho}{d\theta}$  مقدار  $-\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$  قرار دهیم.





شکل ۳.۱: نمودار چند عضو از دسته منحنی مثال ۲.۳.۱



شکل ۴.۱: منحنی در مختصات قطبی و وضعیت شعاع حامل و مماس بر آن

**مثال ۴.۳.۱.** معادله دسته مسیرهای متعامد بر خانواده منحنی های  $\rho = C(1 + \sin \theta)$  را بیابید.  
**حل.** از  $\frac{d\rho}{d\theta} = C \cos \theta$  و جانشینی  $C = \frac{\rho}{1 + \sin \theta}$  معادله ديفرانسيل **دسته منحنی** بصورت

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

حاصل می شود. منحنی های متعامد با جایگذاری  $-\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$  بجای  $\frac{d\rho}{d\theta}$  بدست می آیند پس:

$$-\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\cos \theta}{\rho(1 + \sin \theta)}$$

و بالاخره با ساده کردن معادله دسته مسیره های متعامد بصورت

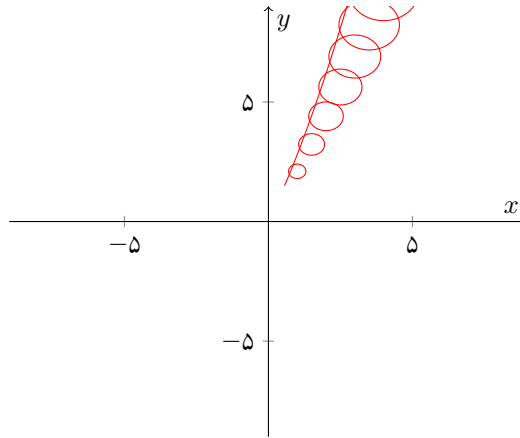
$$\frac{d\rho}{\rho} + (\sec \theta + \tan \theta) d\theta = 0$$

□

حاصل می شود.

### ۲.۳.۱ پوش یک دسته منحنی

هنگامی که یک منحنی بر دسته ای از منحنی ها مماس باشد گوئیم این منحنی **پوش دسته منحنی** است. گیریم که  $f(x, y, C) = 0$  **دسته منحنی** مورد نظر است، برای یافتن منحنی  $\phi$  که بر تمام منحنی های این خانواده مماس باشد کافیسست پارامتر  $C$  را بین معادلات  $f(x, y, C) = 0$  و مشتق آن  $\frac{d}{dC} f(x, y, C) = 0$  حذف نماییم. شکل زیر **پوش** یک دسته دایره را نشان می دهد.



شکل ۵.۱: پوش یک دسته دایره

**مثال ۵.۳.۱.** پوش دسته منحنی  $y = 2C(1 - Cx)$  را بیابید.

**حل.** معادله  $f(x, y, C) = 0$  و مشتق آن  $\frac{d}{dC} f(x, y, C) = 0$  عبارتند از

$$\begin{cases} f(x, y, C) = y - 2C + 2Cx = 0, \\ \frac{d}{dC} f(x, y, C) = -2 + 2Cx = 0. \end{cases}$$

پس از یافتن  $C = \frac{1}{2x}$  از معادله دوم و جایگذاری در معادله اول خواهیم دید که

$$y - 2\frac{1}{2x} + 2\left(\frac{1}{2x}\right)^2 x = 0$$

□

و با ساده کردن جواب، **منحنی پوش**  $y = \frac{1}{2x}$  خواهد شد.

تمرین ۴.۰۱. تمرینات تکمیلی.

۱. مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر و نیز خطی بودن آنها را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} (a) \quad (y')^2 + xy'' - 4x^2 = 2y & , \quad (b) \quad y' + (2x - 1)y = x^2 y^4 \\ (c) \quad y' + y'' + y''' = 0 & , \quad (d) \quad \rho''' = 0 \\ (e) \quad \rho\theta - \rho\rho' = (\rho')^2 & , \quad (f) \quad \sin(xy) = y'' - 1 \end{aligned}$$

۲. مرتبه و درجه ی معادله دیفرانسیل  $x^2 + 3y'' = \sqrt{1 + y'^2}$  چیست؟

۳. تحقیق کنید که برای معادله دیفرانسیل  $y'' + y = 0$  تابع  $y(x) = A \sin x + B \cos x$  بازای هر  $A$  و  $B$  دلخواه جواب عام معادله بوده و سپس جواب خاص آنرا بازای مقادیر مرزی  $y(\pi) = 3$  و  $y(0) = -2$  بدست آورید.

۴. معادله دیفرانسیل هرکدام از **دسته منحنی** های زیر را بیابید. نموداری از هر خانواده را رسم کرده و معادله دیفرانسیل دسته مسیره‌های متعامد بر آنها را نیز پیدا نمایید.

$$\begin{aligned} (a) \quad y = Cx^2 & , \quad (b) \quad x^2 + y^2 = Cy \\ (c) \quad y = \frac{C}{x^2} & , \quad (d) \quad y^2 = 2x^2 + Ce^{2x} - 1 \\ (e) \quad y^2 = x^2 + C_1 e^x + C_2 & , \quad (f) \quad \rho = \frac{C}{\sin \theta} \\ (g) \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} & , \quad (h) \quad y = C_1 x^2 + x^2 \\ (i) \quad \rho = C_1 \tan \theta + C_2 & , \quad (j) \quad \rho = C\theta^2 \\ (k) \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2 & , \quad (l) \quad y = C_1 x^2 - C_2 \\ (m) \quad y = C_1(x - C_2)^2 & , \quad (n) \quad \rho^2 = C \sin 2\theta \end{aligned}$$

۵. منحنی را از **دسته منحنی**  $y = C_1 + C_2 x^2$  بیابید که دارای مقادیر مرزی  $y(0) = 2$  و  $y'(1) = 4$  باشد.

۶. منحنی از خانواده  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$  بیابید که از نقطه  $(0, 2)$  گذشته و شیب آن در این نقطه برابر  $-2$  باشد.

۷. منحنی از خانواده  $y = C_1 e^x + C_2 x$  بیابید که از نقطه  $(0, 1)$  گذشته و  $y'(0) = 4$  باشد.

۸. نشان دهید که تابع  $y = \tan x + \sec x$  در فاصله  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  جوابی برای معادله دیفرانسیل  $2y' = y^2 + 1$  است.

۹. نشان دهید که تابع  $y = e^{at} \sin bt$  با زای هر  $a$  و  $b$  حقیقی دلخواه، جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است.

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$$

۱۰. با روش گفته شده در مثال ۸.۱.۱ معادلات زیر را حل کنید.

$$(a) \quad y' = y(1 - \cos t) \quad , \quad (b) \quad y' = y^2(1 + x^2)$$

$$(c) \quad y' = y \cot t \quad , \quad (d) \quad y' = y \ln y \tan x$$

۱۱. معادله دیفرانسیل مربوط به تمام خطوط واقع در صفحه مختصات را پیدا کنید.

۱۲. معادله دیفرانسیل مربوط به تمام دوائر بمركز مبداء مختصات را بیابید.

۱۳. معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر دسته‌ای از بیضی‌ها را پیدا کنید که مرکز آنها مبداء مختصات و قطر اطول آنها برابر مقدار ثابت  $2k$  است. سپس با روش گفته شده در مثال ۸.۱.۱ معادله حاصل را حل کنید.

۱۴. پوش دسته منحنی‌های زیر را پیدا نمایید.

$$(a) \quad 4x^2 - xy = C(x - y) - C^2 \quad , \quad (b) \quad x^2y - x^2 + y = (x - C)^2$$

$$(c) \quad 2C - 5y = 2C^2x \quad , \quad (d) \quad y = \frac{x}{C} + \frac{C}{x}$$

۱۵. پوش خانواده‌ای از خطوط راست را بیابید که فاصله‌ی بین  $x$  و  $y$  در تقاطع محورهایشان برابر ثابت  $\alpha$  باشد.